



MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de los que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ .
- 4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = x^2$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, y el eje OX de abscisas.
- 3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.
- 4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
- 2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B .
- 4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores \overrightarrow{OB} y \overrightarrow{AB} .

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
- 2) [1.25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$$
 dependiente del parámetro λ .

- 1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
- 2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.
- 3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

- 1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.
- 2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \rightarrow \infty$.
- 3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.
- 4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B .
- 2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π .
- 3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π , y la recta que pasa por los puntos A y B .
- 4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A .

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.

- 1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.
- 2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.